角度方向の微分方程式

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}$$

を用いれば

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{L}{m}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)$$

と変形できる。ここで新しい変数 $u = \frac{1}{r}$ を導入すれば、

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{L}{m}\frac{du}{d\theta}$$

これを t で微分して

$$\begin{aligned}\frac{d^2r}{dt^2} &= -\frac{L}{m}\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\theta}\right) \\ &= -\frac{L}{m}\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2u}{d\theta^2} \\ &= -\frac{L^2}{m^2r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} \\ &= -\frac{L^2}{m^2}u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}\end{aligned}$$

これと、一番上に書いた角度方向の微分方程式

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}$$

を元の微分方程式

$$m\left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\} = -\mu\frac{1}{r^2}$$

に代入すれば

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{m\mu}{L^2}$$

を得る。