

前回、惑星の運動の軌道を表す方程式

$$\frac{1}{u} = r = \frac{\frac{L^2}{m\mu}}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

を求めました。  $0 < \varepsilon < 1$  の場合、すなわち楕円軌道に対しては、楕円の長半径  $a$  が重力源からの平均距離（すなわち遠日点と近日点を結ぶ線分の半分）にあたることより、

$$a = \frac{1}{2}(r_{min} + r_{max}) = \frac{1}{2}\{r(\theta = 0) + r(\theta = \pi)\}$$

と考えることができます。したがって軌道の方程式より、

$$a = \frac{L^2}{2m\mu} \left( \frac{1}{1 + \varepsilon} + \frac{1}{1 - \varepsilon} \right) = \frac{\frac{L^2}{m\mu}}{1 - \varepsilon^2}$$

とあらわされます。またこれを利用すれば軌道の方程式として

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

という円錐曲線の式も求めることができますし、角運動量の大きさ  $L$  として

$$L = \sqrt{m\mu a(1 - \varepsilon^2)},$$

また面積速度として

$$\text{面積速度} = \frac{L}{2m} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu a}{m}(1 - \varepsilon^2)}$$

が求まります。長半径  $a$ 、離心率  $\varepsilon$  の楕円の面積は、短半径が  $b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$  だから

$$\text{楕円の面積} = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

とあらわされ、したがって楕円運動の周期  $T$  は

$$T = \frac{\text{楕円の面積}}{\text{面積速度}} = 2\pi \sqrt{\frac{ma^3}{\mu}} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

となり、ケプラーの第3法則を導くことができます。

（ケプラーの第3法則・・・惑星の公転周期  $T$  の2乗は長半径  $a$  の3乗に比例する。）

長半径  $a$  を直径とする仮想的な円を図のように導入すれば、面積速度一定のケプラーの第2法則は平均角速度  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  を用いて

$$\frac{\omega t}{2\pi} = \frac{SOP \text{ の面積}}{\text{楕円の面積}} = \frac{QOP \text{ の面積}}{\text{円の面積}}$$

となります。(ただし、近日点にいた時刻を  $t = 0$  に選んでいる。) ここで  $\omega t \neq \phi$ 、すなわち楕円軌道を回る速さは一定ではないから平均速度  $\omega t$  には一致しないことに注意して下さい。ここで、図より

$$QOP \text{ の面積} = QCP \text{ の面積} - \Delta QCO = \frac{1}{2}a^2\phi - \frac{1}{2}a^2\varepsilon \sin \phi$$

を使えば

$$\omega t = \phi - \varepsilon \sin \phi$$

が導かれます。(ケプラー方程式。) また幾何学的な考察より、

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta = OR = a(\cos \phi - \varepsilon) \\ y &= r \sin \theta = SR = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \phi \end{aligned}$$

が求まります。

